On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

1. $f'(x) = \dfrac{3}{2}x - 2 = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{4}{3}\right)$, donc $f'(x)$ est du signe de $x - \dfrac{4}{3}$ donc s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{4}{3}$.

f est une fonction polynôme donc :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty$.

De plus, $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{3} \times \dfrac{4}{3} - 2 \times \dfrac{4}{3} + 3 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{8}{3} + \dfrac{9}{3} = \dfrac{5}{3}$.

On établit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$x - \frac{4}{3}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après le résultat précédent la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$.

On a donc : $\dfrac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2 \Longrightarrow f\left(\dfrac{4}{3}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$.

Or $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{5}{3}$ et $f(2) = \dfrac{3}{4} \times 4 - 2 \times 2 + 3 = 3 - 4 + 3 = 2$.

Donc $\dfrac{5}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$ et *a fortiori* : $\dfrac{4}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$.

3. $f(x) - x = \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 3 - x = \dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = \dfrac{3}{4}\left(x^2 - 4x + 4\right) = \dfrac{3}{4}(x-2)^2$

Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) - x \geqslant 0$ donc $x \leqslant f(x)$.

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

4. Étude du cas : $\dfrac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.

a. On va démontrer par récurrence que la propriété $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation**
  D'après la question précédente, pour $x \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$, on a $x \leqslant f(x)$.
  Or $u_0 \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$ donc $u_0 \leqslant f(u_0)$, ce qui revient à $u_0 \leqslant u_1$.
  De plus, si $x \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$, $f(x) \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$.
  Or $u_0 \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$ donc $f(u_0) \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$ et donc $u_1 \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$ et donc $u_{n+1} \leqslant 2$.
  Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$; la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
  On est dans l'intervalle $\left[\dfrac{4}{3}\,;\,2\right]$ donc la fonction f est croissante ; on en déduit : $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$.
  Or $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(2) = 2$.
  Donc on a : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$; la propriété est héréditaire.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour tout n, on a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée ; d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 2$.

c. La suite (u_n) est définie par $f(u_n) = u_{n+1}$ où f est une fonction polynôme donc continue.
La suite (u_n) est convergente vers ℓ donc la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff \dfrac{3}{4}(\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell = 2$.
La suite (u_n) converge donc vers 2.

5. Étude du cas : $u_0 = 3$. On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
On complète la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while u < 100
      u = 3*u*u/4 - 2*u + 3
      n = n + 1
  return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.

Pour tout réel x, on a : $x \leqslant f(x)$ donc, pour tout n, $u_n \leqslant f(u_n)$ soit $u_n \leqslant u_{n+1}$; la suite (u_n) est donc croissante.

On en déduit que pour tout n, on a : $u_n \geqslant u_0$.

Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, on aura donc : $\ell \geqslant u_0$.

On a vu que la seule limite possible de la suite (u_n) était $\ell = 2$; donc on ne peut pas avoir $\ell \geqslant u_0$ car $u_0 > 2$.

Pour $u_0 > 2$, la suite (u_n) n'est donc pas convergente.